

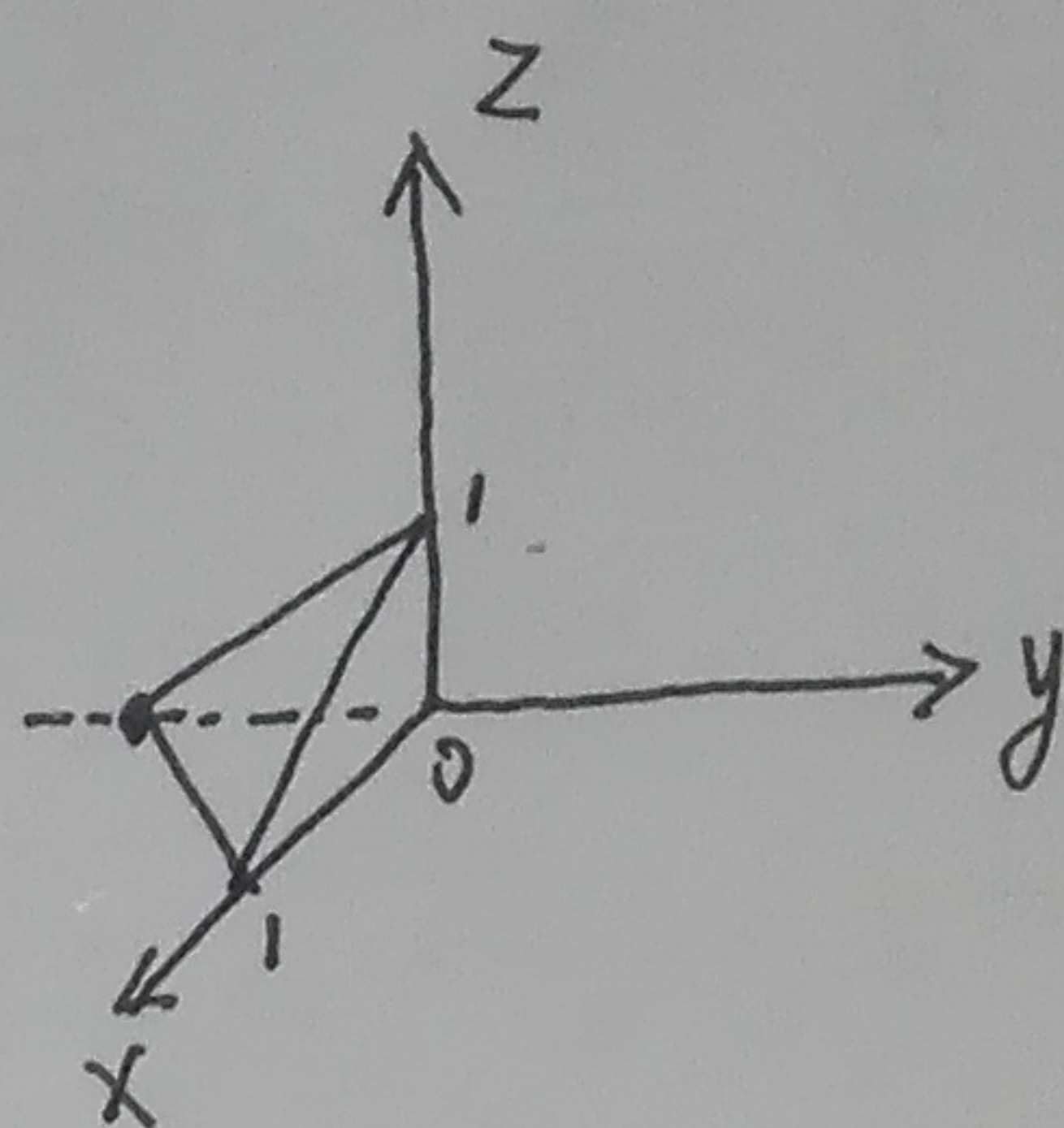
同步练习 P225 - 4. 理学院 廖国勇

4. 设 S 是平面 $x-y+z=1$ 在第 IV 卦限部分平面的左侧, 则

$$\iint_S y dz dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

解: S 在 xOz 平面上的投影区域

$$D_{xz}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x$$



于是, $\iint_S y dz dx$

$$= - \iint_{D_{xz}} (x+z-1) dx dz = \iint_{D_{xz}} (1-x-z) dx dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-z) dz$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x)z - \frac{1}{2}z^2 \right]_{z=0}^{z=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - 1^2 + \frac{1^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

注, 参考答案为 $-\frac{1}{6}$, 是错误的.

同步练习 P225 二.1 理学院 廖国勇 2016.4.19

1. 求 $\iint_S (x+y+z) ds$, 其中 S 是平面 $y+z=5$ 被曲面 $x^2+y^2=25$ 所截得部分平面.

解: 平面方程化为 $z=5-y$

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \sqrt{1+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\iint_S (x+y+z) ds = \iint_{D_{xy}} (x+y+5-y) \sqrt{2} dx dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 25} (x+5) \sqrt{2} dx dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 25} 5\sqrt{2} dx dy$$

$$= 125\sqrt{2}\pi$$

注, 曲面 S 投影到 xoy 平面的区域 $D_{xy}: x^2+y^2 \leq 25$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} x\sqrt{2} dx dy = 0$$

$\sqrt{2}x$ 在对称区域上是奇函数

同步练习 P225 二. 2 理学院 廖国勇

2. 求 $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 S 是平面 $x + y + z = 1$ 在第 I 卦限部分平面

解: S 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$

平面方程化为 $z = 1 - x - y$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

由对称性知 $\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$

$$\text{于是, } \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = 3 \iint_S x^2 dS$$

$$= 3 \iint_{D_{xy}} x^2 \sqrt{3} dx dy$$

$$= 3 \int_0^1 \sqrt{3} x^2 dx \int_0^{1-x} dy$$

$$= 3\sqrt{3} \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$$

$$= 3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

注: 若这样算

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{D_{xy}} [x^2 + y^2 + (1-x-y)^2] \sqrt{3} dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-y} (2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1) dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

也可以, 只不过你很“麻烦”吧了。

同步练习 P226 3. 理学院 廖国勇 2016.4.19

3. 设 S 是单位球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S$, π 为 S 在点 P 的切平面, $\rho(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离, 求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$.

解: 点 $P(x, y, z)$ 处切平面的法向量 $\vec{n} = (x, y, 2z)$

平面 π 的方程

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0$$

这里 X, Y, Z 表示未知量, 于是

$$\rho(x, y, z) = \frac{|x(0-x) + y(0-y) + 2z(0-z)|}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2z)^2}} = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

S 在 xOy 平面上的投影区域 D_{xy} : $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 1$

$$\text{由 } z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} \text{ 得 } \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{4 - 2x^2 - 2y^2}}$$

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} dS$$

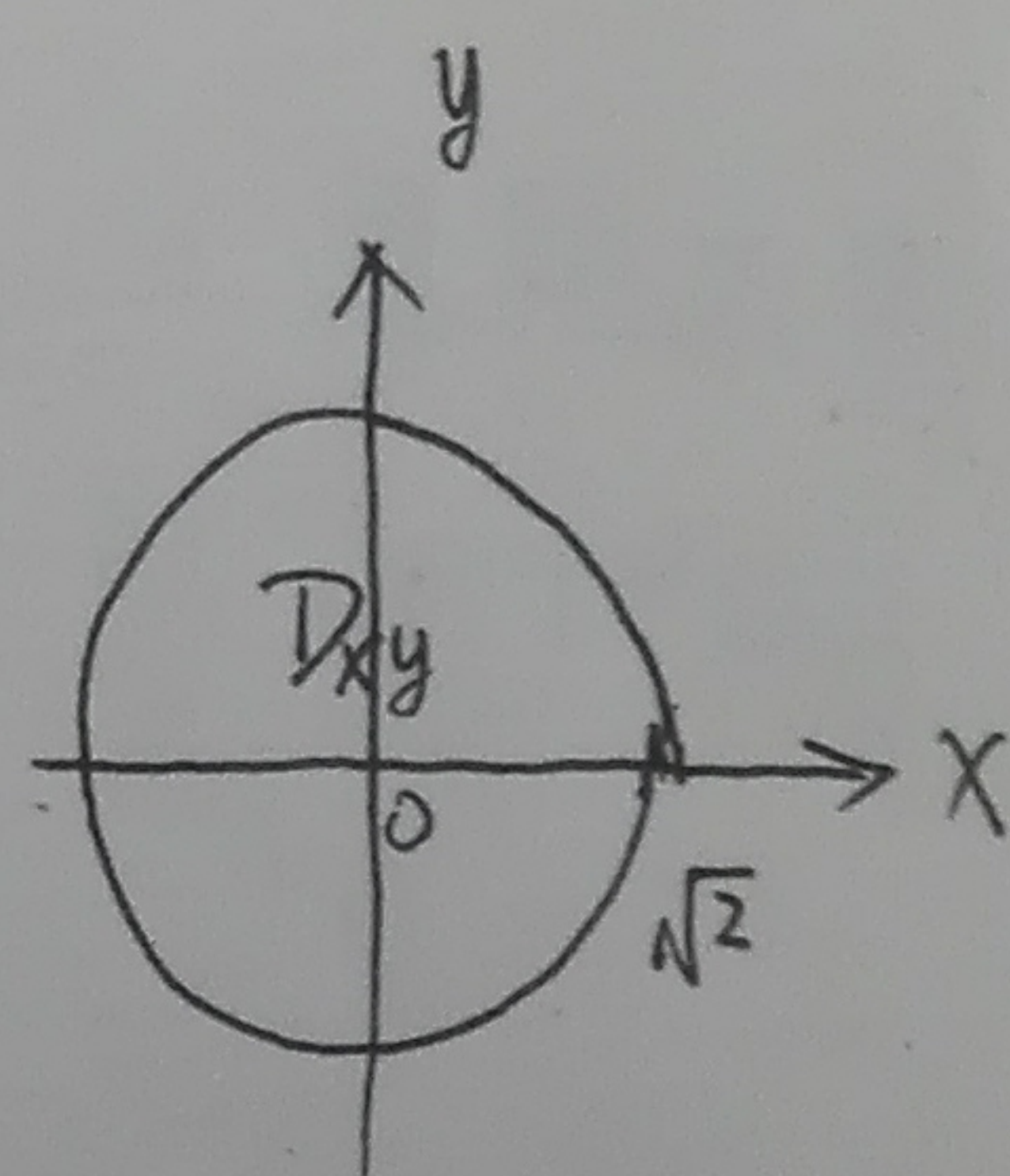
$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{4 - 2x^2 - 2y^2}} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) dx dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{16}\right) \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \pi$$



同步练习 P226 4. 理学院 廖国勇 2016. 4. 19

4. 求 $\iint_S xyz \, dx dy$, 式中 S 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x=0, x=1$
 $y=0, y=1$ 所截得部分曲面的上侧.

解: S 在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

$$\text{于是, } \iint_S xyz \, dx dy = \iint_{D_{xy}} xy(x^2 + y^2) \, dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^3 y + xy^3) \, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

同步练习 P226 5. 理学院 廖国勇

5. 求 $\oiint_S x^2 dy dz$, 式中 S 是球面 $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 的外侧

解: 方法一, 直接算

球面 $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 分成前后两个半球面

$$S_{\text{前}}: x = a + \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$$

$$S_{\text{后}}: x = a - \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$$

两半球面在 yz 上的投影区域 $D_{yz}: y^2 + z^2 \leq a^2$, $S_{\text{前}}$ 的投影取正号

$S_{\text{后}}$ 的投影取负号. 于是

$$\oiint_S x^2 dy dz = \iint_{S_{\text{前}}} x^2 dy dz + \iint_{S_{\text{后}}} x^2 dy dz = \iint_{D_{yz}} (a + \sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2 dy dz$$

$$- \iint_{D_{yz}} (a - \sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2 dy dz = 4a \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} dy dz$$

$$= 4a \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi a \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{8}{3} \pi a^4$$

方法二, 用高斯公式

设 S 围成的几何区域为 $\Omega: (x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$\oiint_S x^2 dy dz = \iiint_{\Omega} 2x dx dy dz$$

$$= 2\bar{x} \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

$$= 2 \cdot a \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{8}{3} \pi a^4$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为 Ω 的中心, 显然 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (a, 0, 0)$

同步练习 P27 6 理学院 廖国勇

6. 求 $\oiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是长方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 表面的外侧。

解: S 分为前后, 左右, 上下六个面

$$S_{\text{前}}: x=a \quad 0 \leq y \leq b \quad 0 \leq z \leq c$$

$$S_{\text{后}}: x=0 \quad 0 \leq y \leq b \quad 0 \leq z \leq c$$

$$S_{\text{上}}: z=c \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b$$

$$S_{\text{下}}: z=0 \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b$$

$$S_{\text{左}}: y=0 \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq z \leq c$$

$$S_{\text{右}}: y=b \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq z \leq c$$

$$\oiint_S x^2 dy dz = \iint_{S_{\text{前}}} x^2 dy dz + \iint_{S_{\text{后}}} x^2 dy dz + \iint_{S_{\text{上}}} x^2 dy dz + \iint_{S_{\text{下}}} x^2 dy dz + \iint_{S_{\text{左}}} x^2 dy dz + \iint_{S_{\text{右}}} x^2 dy dz$$

$$= \iint_{S_{\text{前}}} x^2 dy dz = \int_0^b dy \int_0^c a^2 dz = a^2 bc$$

$$\text{同理 } \oiint_S y^2 dz dx = b^2 ac, \quad \oiint_S z^2 dx dy = c^2 ab$$

$$\oiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = (a+b+c)abc$$

注 长方体为 Ω , 用高斯公式

$$\oiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \iiint_{\Omega} z(x+y+z) dx dy dz$$

$$= z(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \iiint_{\Omega} dx dy dz = z\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)abc$$

$$= (a+b+c)abc$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ 为长方体中心, } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

7. 求 $\oint_S xydydz + yzdzdx + zx dx dy$, 其中 S 是 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成四面体表面的外侧.

(同步练习 P27. 7. 理学院 廖国勇 2016. 4. 19 于湖南隆回)

解: 设 S 围成的区域为 Ω , 则由高斯公式

$$\oint_S xydydz + yzdzdx + zx dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} (y+z+x) dx dy dz$$

$$= (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

$$= (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot V_{\Omega} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{6}$$

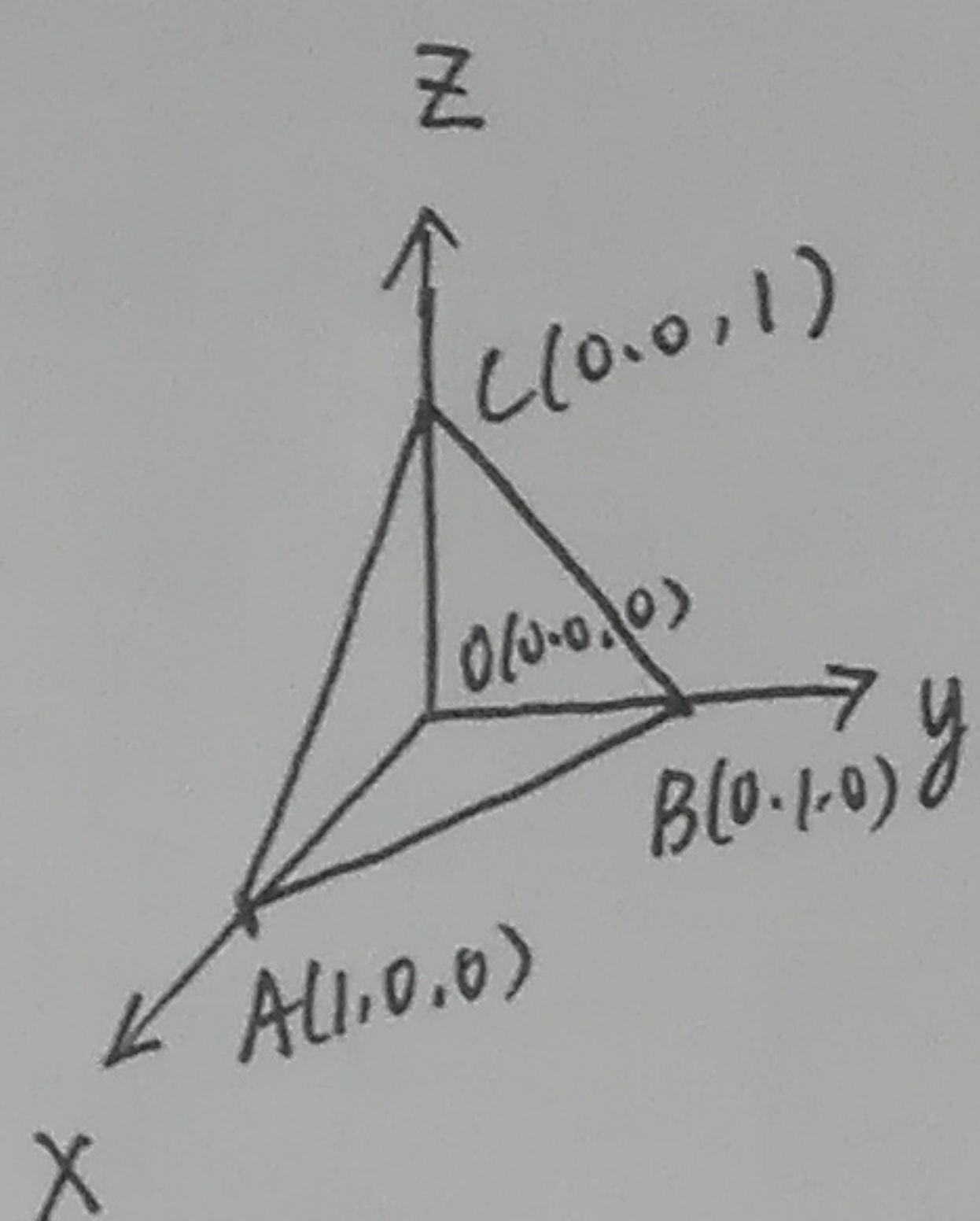
$$= \frac{1}{8}$$

注: 四面体的体积为 $\frac{1}{6}$

顶点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$

的三棱锥的中心坐标

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \right)$$



同步练习 P27. 8

理学院 廖国勇

8. 将第二类曲面积分 $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ 化为第一类的曲面积分, 其中 S 是平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第 I 卦限部分平面的外侧.

解: 平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 外侧的法向量为

$$\vec{n} = (3, 2, 2\sqrt{3})$$

$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5} \right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

于是, $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

$$= \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) ds$$

$$= \iint_S \left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R \right) ds$$